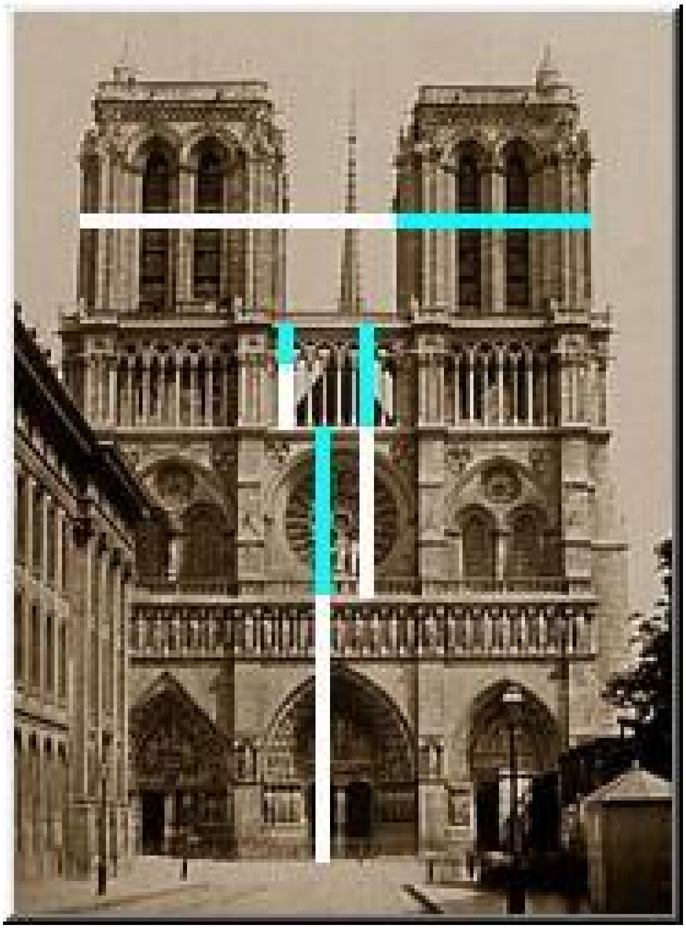
Fibonaccin lukujo

Oppilaslähtöistä matematiikkaa

Toiminnalliset, yhteistoiminnalliset ja kommunikatiiviset työtavat
matematiikan opetuksessa

Sisällysluettelo



Johdanto

Fibonaccin luvut ja kultainen leikkaus ovat kiinnostaneet ihmisiä jo pitkään. Monissa kulttuureissa kultaiseen leikkaukseen perustuvat muodot on nähty muita kauniimpina. Kultaista leikkausta on käytetty mm. Notre Damen katedraalin suunnittelussa ja sen pääperiaatteet opetetaan kouluissa vielä tänä päivänä. Fibonaccin luvut ovat peräisin 1200-luvulta, mutta myös ne ovat kultaisen leikkauksen tavoin tuttuja tämän päivän kansalaisille. Kultaisella leikkauksella ja Fibonaccin sarjalla on myös yhteys toisiinsa, muiden kiinnostavien matemaattisten ominaisuuksien lisäksi.

Fibonacci, Filius Bonacci

Fibonacci, oikealta nimeltään Leonardo Pisano (Leonardo Pisalainen) (1170–1250) oli italialainen matemaatikko. Hän syntyi Italiassa, mutta sai koulutuksensa Pohjois-Afrikassa. Hänen isänsä työnä oli edustaa Pisan tasavallan kauppiaita Bugiassa, joka on tärkeä satamakaupunki Pohjois-Algeriassa, ja siellä eräs arabimatemaatikko opetti Fibonaccille matematiikkaa. Fibonacci oppi arabialaiset (hindulaiset) numerot ja lukujärjestelmän, ja myöhemmin hän vaikutti arabialaisen lukujärjestelmän yleistymiseen Euroopassa julkaisemalla vuonna 1201 teoksen *Algebra et Almuchabala*.

Fibonacci matkusteli laajalti isänsä kanssa. Matkoillaan hän havaitsi valtavia matemaattisten järjestelmien tuomia etuja joita käytettiin niissä maissa joissa hän kävi.

Fibonacci kirjoitti kirjan *Liber abaci* vuonna 1202. Kirjassa hän osoitti, kuinka paljon helpompaa laskeminen arabialaisilla numeroilla oli kuin roomalaisilla numeroilla. Hän suositti uutta laskutapaa Venetsian kauppiaille, mutta nämä pitivät sitä roomalaisilla numeroilla laskemista vaikeampana ja kielsivät sen käytön. Laskutapa osoittautui kuitenkin ylivoimaiseksi, mikä johti sen leviämiseen Eurooppaan. Laajemmin se hyväksyttiin vasta 1500-luvulla, jolloin arabialaiset numerot syrjäyttivät roomalaiset numerot lopullisesti. Fibonacci ymmärsi myös negatiivisten lukujen merkityksen, ja käytti niitä esimerkiksi velkojen ilmaisemiseen.

Nimi Fibonacci yhdistetään yleensä hänen nimeään kantavaan lukusarjaan.

Fibonaccin lukujono

Fibonaccin lukujono määritellään seuraavasti:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } n = 0 \\ 1 & \text{, kun } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{, kun } n > 1 \end{cases}$$

Toisin sanoen Fibonaccin lukujonon ajatuksena on laskea yhteen kaksi edellistä lukua, ja näin saada seuraavan luvun arvo. Fibonaccin lukujonon ensimmäiset kymmenen lukua järjestyksessä ovat 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Joskus on myös tapana määritellä Fibonaccin lukujonon alkavan ykkösestä eikä nollasta.

Fibonaccin jono on kiinnostava sikäli, että sen kahden perättäisen luvun suhde lähestyy kultaista leikkausta. Koska Fibonacci-tyyppisesti eteneviä korkoa korolle -summautuvia ilmiöitä löytyy paljon biologisesta luonnosta, löytyy sieltä myös paljon kultaista leikkausta vastaavia suhteita.

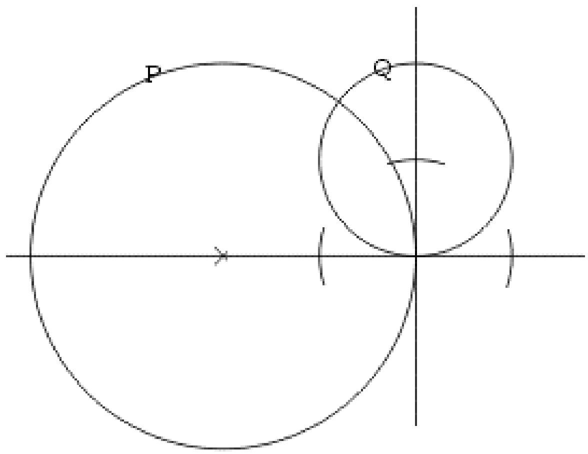
Lukujonon matemaattinen esitys

Kultaisen leikkauksen matemaattinen muoto on $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}6180229887$

Mielenkiintoista on selvittää myös kyseisen arvon käänteisluku eli 1/1,6180229887.

Konstruoiminen harpilla ja viivoittimella

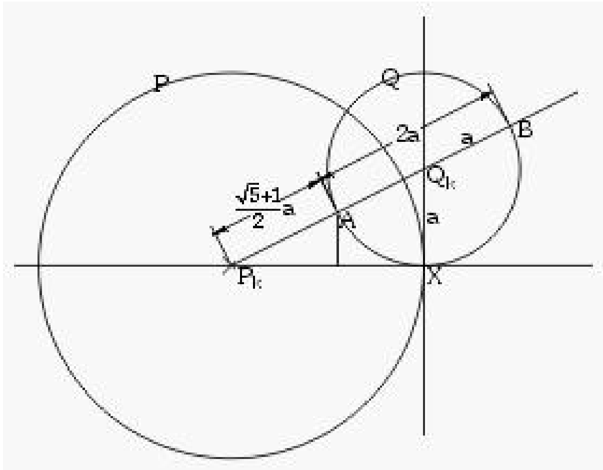
Aluksi piirretään ympyrä P ja pienempi ympyrä Q, jonka halkaisija on yhtä pitkä kuin P:n säde, ja joka sivuaa P:n sädettä P:n kehällä. Tätä varten puolitetaan ympyrän P säde ja piirretään sille normaali kehän pisteen X kautta. Ympyrän Q keskipiste on tällä normaalilla, ympyrän P säteen puolikkaan etäisyydellä pisteestä X.



Tarkastellaan kuviota, joka syntyy, kun piirretään ympyröiden P ja Q keskipisteiden kautta kulkeva suora.

Olkoon ympyrän P säde 2*a*. Janan P_kQ_k pituus saadaan helposti laskettua Pythagoraan lauseen avulla; se on

$$\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a.$$



Tällöin janan P_kA pituudeksi saadaan

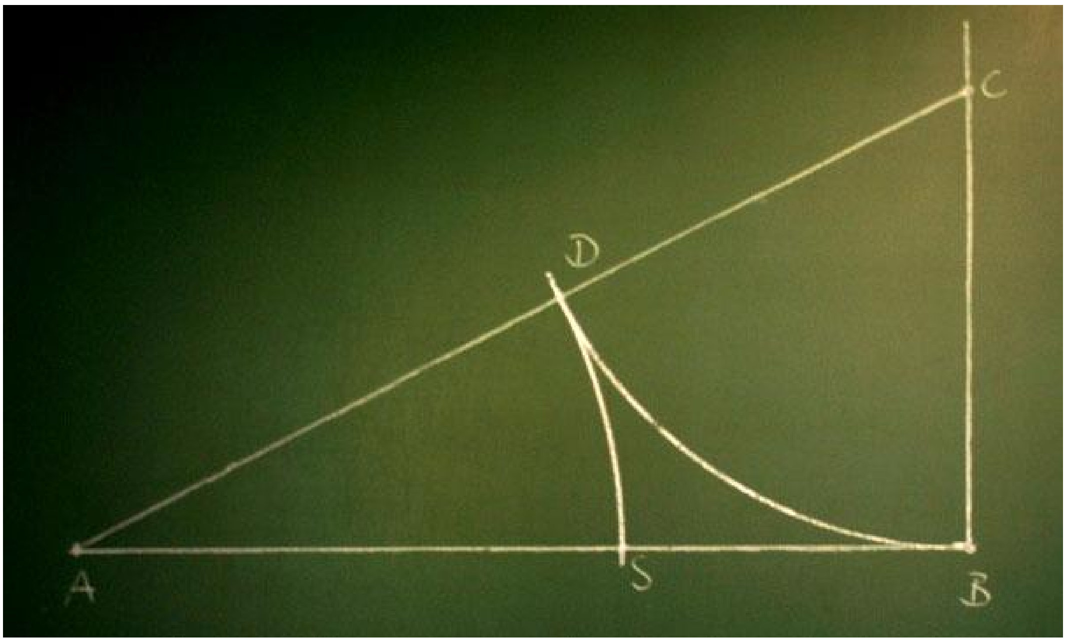
$$\sqrt{5}a-a=(\sqrt{5}-1)a.$$

Lasketaan nyt janan P_kA suhde janaan AB

$$\frac{(\sqrt{5}-1)\cancel{a}}{2\cancel{a}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Nyt huomataan, että janat ovat kultaisen leikkauksen suhteessa.

Toinen tapa konstruoida kultainen leikkaus geometrisesti, on esitetty alla olevassa kuvassa. Piirretään ensin jana AB ja pisteen B kautta kulkeva normaali. Merkitään normaalille piste C siten, että sen etäisyys pisteestä B on puolet janan AB pituudesta. Tämän jälkeen piirretään janalle AC piste D ja edelleen janalle AB piste S kuten kuvassa on esitetty.



Nyt voidaan laskemalla todistaa, että sekä AB/AS että AS/SB ovat kultaisen leikkauksen suhteessa. Tämä jätetään kuitenkin lukijan oman mielenkiinnon varaan. Vihjeenä voin kuitenkin antaa, että janan BC pituudeksi kannattanee olla a/2.

Opetuskokonaisuus

Lähtökohta

Perimmäisenä tavoitteena on havaita joitakin tapoja, miten luvut voivat liittyä toisiin lukuihin muodostaen samalla säännönmukaisesti käyttäytyvän lukujonon. Voidaan ajatella lukujonojen perustuvan kahteen alla mainittuun alkeistapaukseen, joita voidaan hieman tutkiskella ennen tutustumista Fibonaccin lukujonoon.

Lukujonoa sanotaan geometriseksi, jos sen kahden peräkkäisen termin suhde on vakio:

1, 2, 4, 8, 16, 32, …

Lukujono on aritmeettinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio:

2, 4, 6, 8, 10, 12, …

Jatkossa näitä yksinkertaisia lukujonoja ei käsitellä enempää, vaan perehdytään hieman monimutkaisempaan ja samalla mielenkiintoisempaan tapaukseen.

Vaihe 1

Oppilas voi halutessaan lähteä tutustumaan Fibonaccin lukujonoon haluamistaan lähtökohdista. Tällaisia pääkohtia ovat esimerkiksi

- arkkitehtuuri,
- kuvataide kaikissa muodoissaan,
- ihmisen keho,
- ihmisen kasvot,
- eläimet ja
- kasvit.

Yksinkertaisinta lienee lähteä matemaattiseen seikkailuun kasveista, ja tätä tapausta käsitellään jatkossa. Tällöin ei välttämättä tarvita mitään apuvälineitä. Hyviä ja helppoja kasveja ovat mm. männyn käpy, ananas, omena ja banaani tai vaikkapa vaahteran lehti. Toki mikään näistä ei yksinään riitä lukujonon lukujen selvittämiseen. Siksi asiaa voidaan lähestyä monin tavoin. Voidaan työpareittain tai pienryhmissä tutkia useita kasveja ja pyritään etenemään tutkimuksessa mahdollisimman pitkälle ryhmittäin ja kootaan tutkimustulokset vasta loppuvaiheessa yhteisen keskustelun ja pohdinnan kautta yhteen. Toinen tapa on tutkia ryhmissä vain paria kasvia ja koota ryhmien tulokset jokaisen välivaiheen jälkeen. Kolmas tapa on antaa jokaiselle ryhmälle oma pääkohta, minkä kautta oppilaiden tulisi lähestyä tutkimusongelmaa. Jotta lähestymistapa ei olisi liian hankala, riippuu sopivan tavan valinta oppilasaineksesta, joten opettajan oppilaantuntemus on avainasemassa.

Kaikissa lähestymistavoissa on kuitenkin tarkoituksena itse keksiä löytämiensä suhteiden avulla lukujonon lukuja ja lopulta lukujonon raja-arvo ts. se luku, jota lukujonon peräkkäisten lukujen suhde lähestyy.

Tutkimus vie aikaa helposti 2-3 oppitunnin verran riippuen siitä, kuinka syvällisesti asioita käsitellään tai integroidaanko tuloksia eri oppiaineiden välillä.

Valmistelut

- erikokoisia ja erilaisia kasveja tai kasvin osia
- kuvia tunnetuista rakennuksista
- kuvia tunnetuista maalauksista
- kuvia tunnetuista valokuvista
- kuvia tunnetuista veistoksista
- pysäytyskuvia elokuvista
- kuvia eläimistä ja kasveista

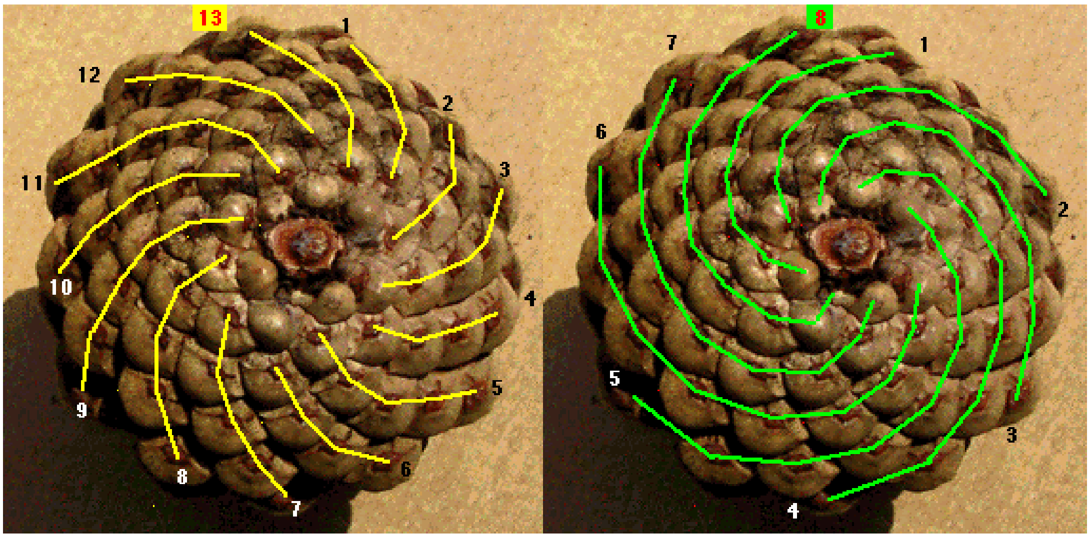
Välineet

- kynä
- paperia
- viivoitin
- mittanauha
- tusseja

Varsinkin kirjallisuus, mutta myös Internet toimii hyvin lähteenä. Internetin käytössä on kuitenkin vaaransa. Sitä käytettäessä kannattaa ehdottomasti sulkea pois ne sivustot, joissa lukujono tai sen raja-arvolle annetaan vastaus valmiina. Tällöin työn tarkoitus vesittyy, koska ihmisellä on usein valitettavasti tapana ottaa ratkaisut valmiina mieluummin kuin etsiä niitä itse.

Vaihe 2

Lasketaan esimerkiksi männyn kävyssä olevien kierteiden määrät. Huomaa, että kierteitä on kahden suuntaisia. Tusseilla voidaan merkitä käpyihin jo lasketut kierteet, jolloin laskuissa on helpompi pysyä.



Vastaavasti voidaan laskea vaikkapa poikkileikatun banaanin ja kuoren "lohkot". Samoin poikkileikatun omenan siemenkodasta voidaan tehdä mielekäs ja tutkimusta tukeva havainto. Myös salaatin lehdet kiertävät kasvin keskiosaa tietyllä logiikalla. Opettajan täytyy etukäteen selvittää, millä kasveilla ilmiötä esiintyy, ja ohjata oppilaiden tekemää tutkimusta haluttuun suuntaan.

Usein ylhäältä päin katsottuna kasvien lehdet ovat sopivasti kierteellä kasvin varteen nähden, mutta sen havaitseminen vaatii tietynlaista tarkkuutta ja avaruudellista hahmottamiskykyä, jota kaikilla ei välttämättä ole.

Tätä luonnossa ilmenevää Fibonaccin lukujonon esiintymistä kutsutaan nimellä phyllotaxis.

Vaihe 3

Kun aiemmin tutkituissa (sopivasti valituissa) kasveista on löytynyt mielekkäitä lukuja ja ne on huolellisesti kirjattu ylös, järjestetään luvut suuruusjärjestykseen pienimmästä alkaen.

	Kierteitä vastapäivään	Kierteitä myötäpäivään
Männyn käpy	13	8

	Lohkoja	Kuoren sektoreita
Banaani	3	5

Vielä kun muistetaan, että kukin luku kirjoitetaan jonoon vain yhden kerran, saadaan toivottavasti tulokseksi osa Fibonaccin lukujonosta: 3, 5, 8, 13. Voi tietenkin olla, että löydetyt luvut eivät aina olekaan peräkkäisiä (esim. 3,5,13 ja 21), joten yhteistyö toisten ryhmien kanssa voi auttaa selvittämään puuttuvia lukuja.

Vaihe 4

Nyt pyritään löytämään sääntö, jonka mukaan luku riippuu edellisistä luvuista. Löytyneen säännön mukaan jatketaan saatua lukujonoa molempiin suuntiin ja täydennetään mahdollisesti välistä puuttuvat luvut: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…

Samalla kannattaa miettiä, miksi ei välttämättä ole päästy haluttuun lopputulokseen eli on mahdollisesti saatu säännöstä poikkeavia lukuja. Lukujonon luvuthan eivät esiinny kaikilla kasveilla, vaikka ovatkin melko yleisiä kasvikunnassa. Tämä on melko olennainen osa kaikkea tutkimusta, ja siitä voi vielä oppiakin jotain.

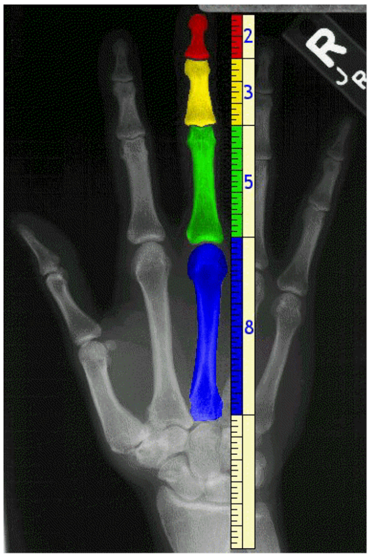
Vaihe 5

Tässä vaiheessa pyritään selvittämään mitä lukua perättäisten lukujen osamäärä lähestyy. Tulos on luonnollisesti sitä tarkempi, mitä suuremmat lukujonon luvut ovat kyseessä. Kannattaa kuitenkin lähteä ensin liikkeelle itse löydetyistä luvuista, ja jatkaa tutkimista yhä suuremmilla luvuilla.

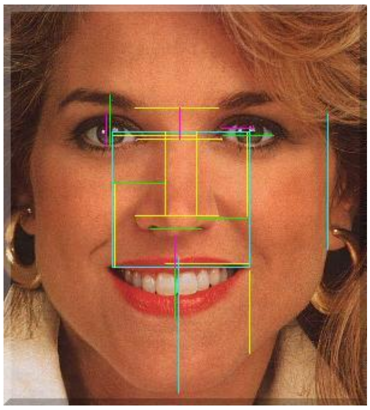
Tulokseksi toivottavasti saadaan kultaisen leikkauksen raja-arvo (1,6180229887) tai ainakin jokin sitä hyvin lähellä oleva arvo.

Vaihe 6

Kun tässä tutkimuksessa lähdettiin alun perin liikkeelle kasvien tutkimisesta, on hyvä miettiä missä ja millä muilla tavoin saatu kultaisen leikkauksen raja-arvo esiintyy luonnossa tai esimerkiksi arkkitehtuurissa ja taiteissa.



Esimerkiksi ihmisestä löytyy useita suhteita, jotka täsmäävät kultaisen leikkauksen raja-arvon kanssa. Kun katsotaan peiliin, voidaan helposti havaita, että etäisyys leuan kärjestä suuhun ja suusta nenän päähän tai kasvojen korkeuden ja leveyden suhde antavat likimain kyseisen arvon. Näin käy myös etäisyyksille vasemman käden sormenpäistä saman käden olkapäähän ja siitä edelleen oikean käden sormenpäihin. Samoin etäisyys oikean käden sormenpäistä vasempaan olkapäähän ja koko sylin leveys ovat likimain kultaisen leikkauksen suhteessa.



Kannattaa huomata, että valokuvauksessa tai maalaustaiteissa kultainen leikkaus on keskeisessä asemassa. Kuvaa otettaessa sommittelulla on suuri merkitys kuvan kauneusarvon ja miellyttävyyden kannalta. Hallitsevaa kohdetta ei normaalisti kannata sijoittaa kuvan keskelle, vaan mieluimmin hieman jompaankumpaan reunaan, eikä maisemakuvia otettaessa juuri koskaan horisonttia sijoiteta keskelle kuvaa.

Liitteet

Oppilaan ohje

Välineet

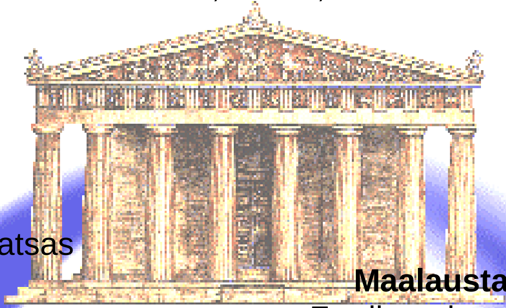
- kynä
- paperia
- viivoitin
- mittanauha (ihmistä mitattaessa)
- tusseja (laskettujen kasvin osien merkitsemiseen)

Tehtävä

- Etsi mukana tuomistasi ja/tai opettajan antamista kasveista mahdollisimman monia erilaisia lukuja. Tee hyvät muistiinpanot.
- Järjestä luvut pienimmästä luvusta suurimpaan. Jos sama luku esiintyy monta kertaa, kirjoita se vain yhden kerran.
- Selvitä, miten luvut riippuvat toisistaan, siis mikä yhteys niillä on toisiinsa.
- Jatka selvittämääsi lukujonoa.
- Mitä lukua jonon peräkkäisten lukujen (luku jaettuna sitä edeltävällä luvulla) osamäärä lähestyy?
- Löydätkö itsestäsi vastaavia mittoja, joiden suhde on lähes sama tai lähes sama kuin edellä laskemasi lukujen osamäärä?
- Keksitkö, missä muualla vastaava lukujen suhde esiintyy?

Kultainen leikkaus monessa mukana

Arkkitehtuuri
Parthenonin temppeli, Ateena, Kreikka
Pyramidit, Egypti
Notre Dame, Pariisi, Ranska
Eiffel-torni, Pariisi, Ranska



Kuvanveisto
Michelangelo: Daavid
Aleksandros: Milon Venus
Leonardo da Vinci: Hevospatsas
Sfinksit, Egypti

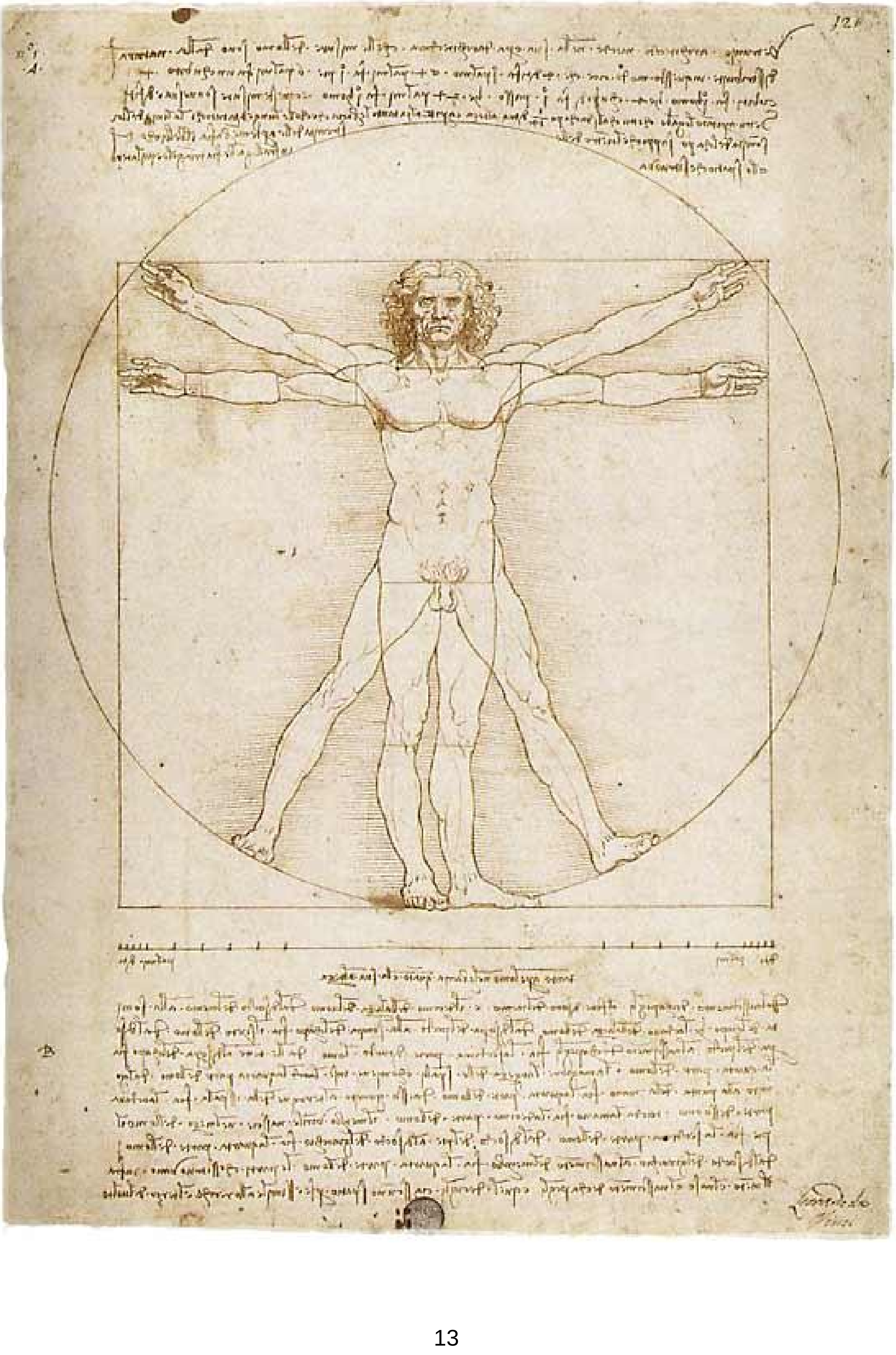
Maalaustaide/ valokuvaus / elokuva
Ferdinand von Wright: Taistelevat metsot
Gustav Klimt: Adele Bloch-Bauer
Robert Doisneau: Suudelma Pariisin kaupungintalon edessä
Sergio Leone: Huuliharppukostaja

Ihminen
Leonardo da Vinci: Mona Lisa
Kasvot
Keho
Raajat

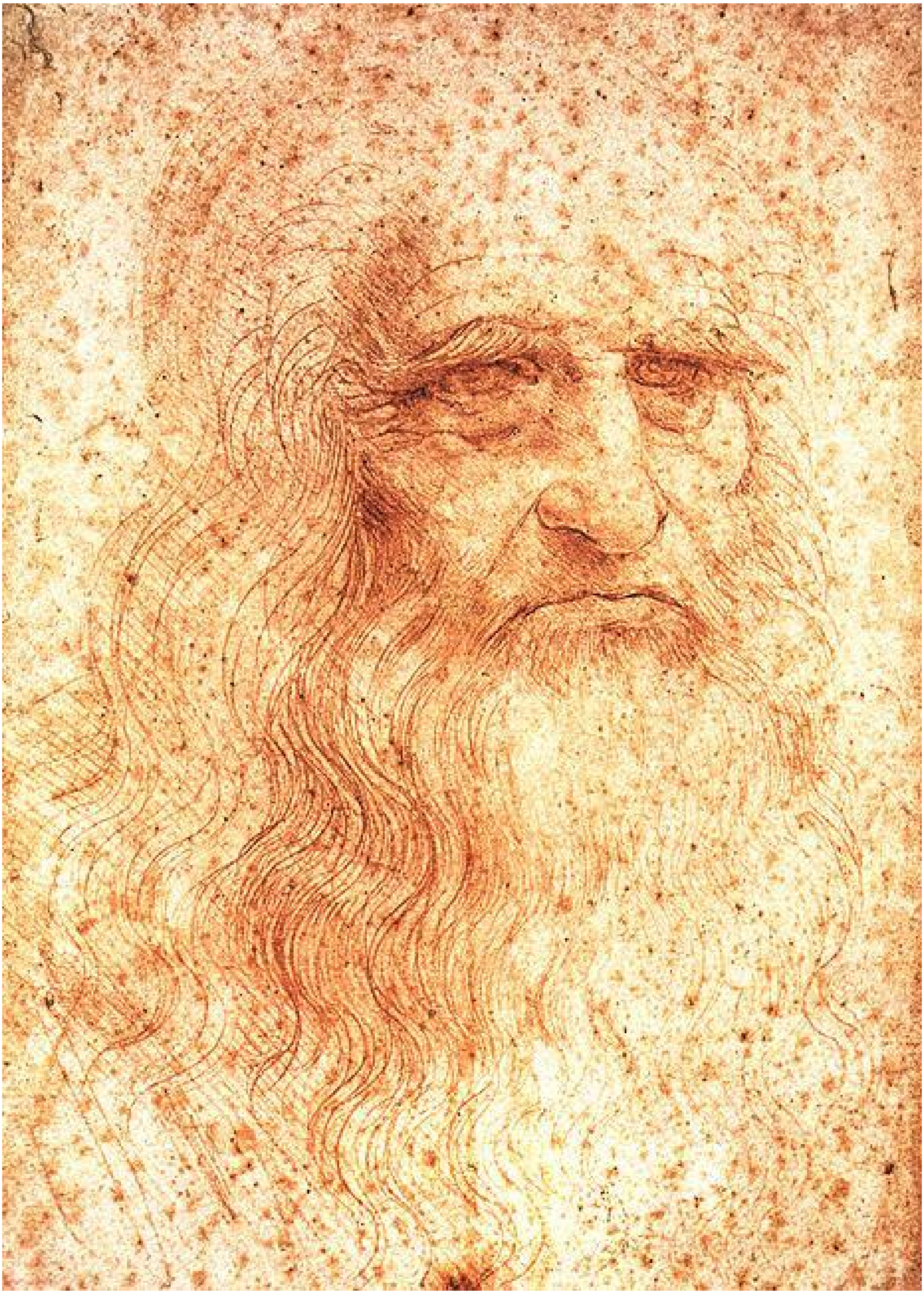
Kasvit
Männyn käpy
Auringonkukka
Banaani
Omena

Eläimet
Delfiini
Helmivene
Tiikeri
Hevonen

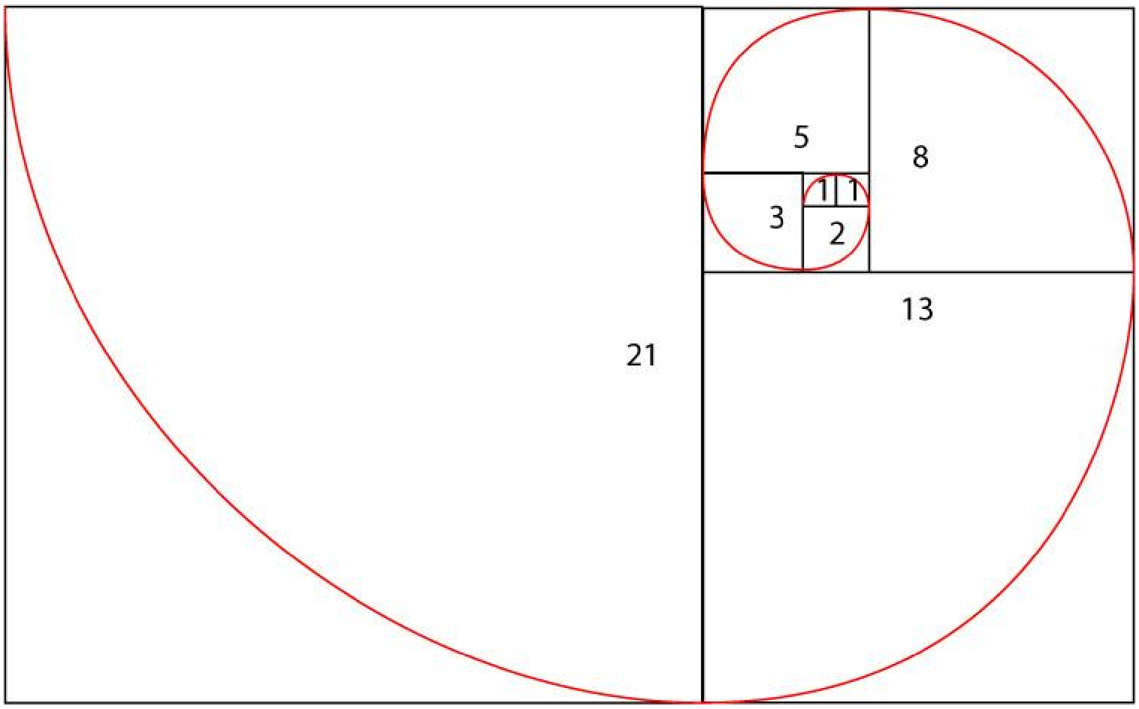
Leonardo da Vinci: Tutkielma ihmisen mittasuhteista



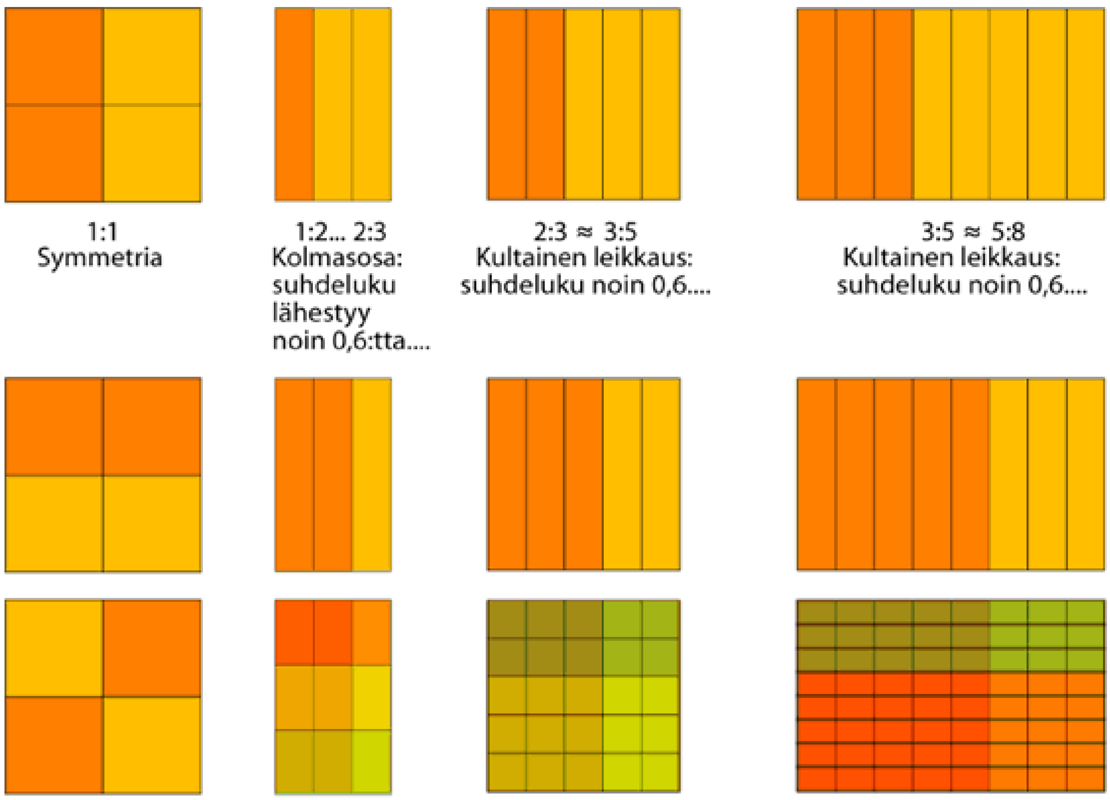
Leonardo da Vinci: Omakuva



Kultainen leikkaus



Graafinen suunnittelu



Fibonaccin lukusarja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Lähdeluettelo

- Heidi Lahtinen, Studio 4, http://users.tkk.fi/~hmlahtin/studio4/harj1.html, 29.8.2008
- Ron Knott, Surrey University: Fibonacci Numbers and the Golden Section, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html, 29.8.2008
- Goldennumber.net, http://goldennumber.net/, 29.8.2008
- Jeri Evans, Spotsylvania County Schools, Fibonacci, http://www.spotsylvania.k12.va.us/bms/tr/fibonacci%20numbers%20and%20nature.htm, 29.8.2008
- Dr. Bruce G. Marcot, Tom Bruce, Ecology Picture of the Week, http://taos-telecommunity.org/epow/EPOW-Archive/archive_2003/EPOW-031117.htm, 29.8.2008
- Eric W. Weisstein, Golden Ratio, MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html, 1.9.2008
- Drexel University , The Math Forum, http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.golden.ratio.html, 1.9.2008
- Teemu Varis, Kultainen kulmio, http://www.seepia.org/html/seepia3/kulmio/kulmio.shtml, 2.9.2008